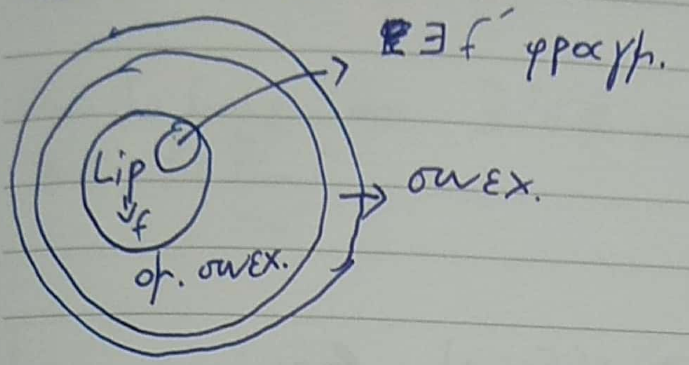
21-03-2018




Πρόταση : $f:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$ f ομ. συνεχής

$f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,1]$
$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x\to 0^+} +\infty$ } συνεχής

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχ, αλλά όχι ομοιόμ.

$(\exists\, \varepsilon>0)\ (\forall \delta>0): \exists\, x_\delta, y_\delta\in[a,b]\ |x_\delta-y_\delta|<\delta$ και $|f(x_\delta)-f(y_\delta)|\geq\varepsilon$ | $\delta=1/n$

$\delta=1/n$, $(x_n)(y_n)\subseteq[\alpha,b]$, ώστε $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$, $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon$

$\alpha\leq x_n\leq b \overset{B-W}{\Rightarrow} \exists\,(x_{k_n})_n$ υπακολ. της $(x_n)$ : $x_{k_n}\to \ell\in[a,b]$

$f(x_{k_n})\to f(\ell)$ ①

$f(y_{k_n})\overset{?}{\to} f(\ell)$

Αφού $x_n-y_n\to 0 \Rightarrow \underbrace{x_{k_n}}_{\downarrow\ \ell}-y_{k_n}\to 0$ } $\Rightarrow$

$\Rightarrow y_{k_n}=(y_{k_n}-x_{k_n})+x_{k_n}\to 0+\ell \underset{\text{συνεχής } f}{\overset{f}{\Rightarrow}} f(y_{k_n})\to f(\ell)$ ②

①,② $\Rightarrow \underbrace{|f(x_{k_n})-f(y_{k_n})|}_{\geq\ \varepsilon\ \forall k_n}\to 0$ άτοπο.

Πρόταση: $f: A \to \mathbb{R}$ ομοιομ. συνεχ. Τότε αν $(x_n)_n$ βασική $\Rightarrow$ $f(x_n)_n$ βασική

$x_n \to 1$ $\quad (a, b)$
$f(0,1) \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$
$(x_n)_n$ βασική $\Rightarrow x_n \to 1 \overset{f}{\Rightarrow} f(x_n) \to f(1) \to (f(x_n))_n$ βασική

Αποδ (προτ): $f$ ομοιομ. συνεχής Αν $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : \forall x, y \in A$:
$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
$|x_n - x_m| < \delta$
Εφόσον, $(x_n)_n$ βασική, για το $\delta > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ Άρα

$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$

Πρόταση $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχ. (στο Π.Ο.) Τότε η $f$ είναι ομοιομ. συνεχής $\Leftrightarrow \exists \lim_{x \to a^+} f(x)$ και $\lim_{x \to b^-} f(x)$

($\Leftarrow$) Ορίζουμε $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\left.\begin{aligned} g(a) &= \lim_{x \to a^+} f(x) \\ g(b) &= \lim_{x \to b^-} f(x) \\ g(x) &= f(x) \\ x &\in (a, b) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &g \text{ συνεχ στο } [a, b] \\ &\quad\Downarrow \\ &g \text{ ομοιομ. συνεχής στο } [a, b] \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Εφόσον $(a, b) \subseteq [a, b]$ θα είναι ομ. συνεχής στο $(a, b)$ Άρα $f(x)$ ομ. συνεχής στο $(a, b)$.

($\Rightarrow$) $f:(\alpha,b)\to\mathbb{R}$ ομοιομ. συνεχής $\quad \exists \lim_{x\to a^+} f(x)$ (παρομ. $\exists \lim_{x\to b^-} f(x)$)

$\exists l : (x_n)_n \subseteq (\alpha,b)$ $x_n\to\alpha \Rightarrow f(x_n)\to l \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a^+} f(x)=l$

Θα δείξουμε ότι $\exists l\in\mathbb{R}$ ώστε $\forall (x_n)_n \subseteq(\alpha,b)$ με $x_n\to\alpha \Rightarrow f(x_n)\to l$, τότε $l=\lim_{x\to a^+} f$

Έστω $x_n\to\alpha$, $(x_n)_n\subseteq(\alpha,b)$ ($\exists$ τέτοια) Γιατί η $(f(x_n))_n$ συγκλίνει(?)

$x_n\to\alpha \Rightarrow (x_n)$ βασική $\underset{f \text{ ομ. συνεχ.}}{\Rightarrow}$ $(f(x_n))_n$ βασική $\Rightarrow \exists \lim f(x_n)=l\in\mathbb{R}$

Έστω τυχούσα $(y_n)_n\subseteq(\alpha,b)$: $y_n\to\alpha \Rightarrow f(y_n)\to l'\in\mathbb{R}$ ($\underline{l'=l}$)

$x_n-y_n\to \alpha-\alpha=0$

$f$ ομ. συνεχ. $\Rightarrow f(x_n)-f(y_n)\to 0$

$\qquad\qquad l - l' \Rightarrow l=l'$

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in(1,2)\\ 2, & x\in(0,1)\end{cases}$$

$f$ συνεχής στο $(0,1)\cup(1,2)$

$x_n\to 1^-$ | $x_n-y_n\to 0$

$y_n\to 1^+$ | $f(x_n)-f(y_n)=2-1=1\neq 0$

Scanned by CamScanner

$f(x)=\sqrt{x}$ , $x\in[0,1]$

$f$ συνεχ στο $[0,1] \Rightarrow f$ ομοιομ. συνεχ , $f\in Lip$ (?)

$\exists f'(x)\ \forall x\in(0,1)$ . Αν ① αληθής $\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\leq M \overset{\exists}{\Rightarrow} \lim\limits_{y\to x}$

$\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(x)$ $\quad |f'(x)|\leq M$

$f(x)=\sqrt{x}$

$x\in[1,+\infty)$

$|f'(x)|=\left|\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right|\leq\dfrac{1}{2} \Rightarrow f\in Lip(1/2)$

$\Downarrow$

$f$ ομοιομ. συνεχής $[1,+\infty)$

$f$ ομοιομ. συνεχ.

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_1>0: x,y\in[0,1]$ με $|x-y|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$f$ ομ. συνεχ. $[1,+\infty)$

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_2>0: x,y\in[1,+\infty)$ με $|x-y|<\delta_2 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Θ.δ.ο. $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0: \left.\begin{array}{l}|x-y|<\delta\\ x,y\in[0,+\infty)\end{array}\right\} \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ i) Αν $x,y\in[0,1] \overset{①}{\Rightarrow} |f(x)-f(y)|<\varepsilon/2<\varepsilon$

ii) Αν $x,y\in[1,+\infty) \overset{②}{\Rightarrow} |f(x)-f(y)|<\varepsilon/2<\varepsilon$

iii) $x\in[0,1]$ , $y\in[1,+\infty)$ και $|x-y|<\delta$

$x \in [0,1]$, $y \in [1,+\infty)$ $\quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(1)| + |f(1)-f(y)|$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\left.\begin{array}{l} |x-1| < \delta \leq \delta_1 \\ |y-1| < \delta \leq \delta_2 \end{array}\right\}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"', "\text{ομ.συν.}"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g", "\text{ομ.συν.}"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$

Είναι η $g\circ f$ ομ. συνεχ.;

Αρκεί $\forall (x_n)_n, (y_n)_n \subseteq A$ με $x_n - y_n \to 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (g\circ f)(x_n) - (g\circ f)(y_n) \to 0$$

$f$ ομ. συνεχ. $\Rightarrow f(x_n) - f(y_n) \to 0$

$$\xRightarrow[\text{ομ.συ.}]{g} g(f(x_n)) - g(f(y_n))_n \to 0$$

$\sin\sqrt{x}$, $x \in [0,+\infty)$

$f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = \sin x$

$$\begin{tikzcd} f[0,+\infty) \arrow[r, "\sqrt{x}"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & {[0,+\infty)} \arrow[d, "g=\sin x"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$g(x) = \sin x$

$g'(x) = |\cos x| \leq 1 \Rightarrow g \in Lip(1)$